

*Memorias de la Primera Escuela de Astroestadística: Métodos Bayesianos en Cosmología
9 al 13 Junio de 2014. Bogotá D.C., Colombia*

Editor: Héctor J. Hortúa

[Material suplementario](#)

Estudio de geodésicas nulas en un espacio axialmente simétrico.

Study of null geodesic in an axially symmetric space

JONATHAN PINEDA¹ LEONARDO CASTAÑEDA² JUAN MANUEL TEJEIRO³

Resumen

Desde el surgimiento de la teoría de la Relatividad, se han encontrado una gran variedad de soluciones en torno a las ecuaciones de campo de Einstein, dependiendo del tipo de espacio-tiempo. Entre ellas, se encuentra el espacio axialmente simétrico que describe los agujeros negros rotantes. Para entender más acerca de estos objetos astrofísicos se realiza un trazado de rayos, que es principalmente una simulación de la trayectoria que siguen los fotones desde el agujero negro hasta el observador y debido a que son millones de fotones que cada segundo recibe el observador, se necesita una herramienta computacional que permita resolver este problema para la formación de las imágenes alusivas a un agujero negro y obtenidas a través del uso de códigos numéricos. Estos últimos, permiten una perspectiva gráfica de cada píxel generado por las trayectorias seguidas por el fotón en el espacio-tiempo, con lo que se puede analizar variables y características del agujero negro. Con la ayuda del programa *YNOGK-GEOKERR*, se pueden generar las imágenes del agujero negro y también las soluciones de las ecuaciones de movimiento de este sistema astrofísico. Con este artículo se pretende realizar un estudio sobre este tipo de espacio-tiempo y además se muestran los resultados obtenidos por la simulación de un agujero negro con esta rutina.

Palabras clave: Trazado de Rayos, Separabilidad de Hamilton Jacobi, Coordenadas de Boyer-Lindquist.

Abstract

Since the development of Relativity theory, a variety of solutions have been found around Einstein field equations, depending on the time-space. For instance, we can find the axially symmetric space which describes a rotating black hole. To understand this astrophysics objects, we must do a ray tracing, which is a simulation of

¹Universidad Nacional de Colombia. E-mail: japinedag@unal.edu.co

²Universidad Nacional de Colombia. E-mail: lcastanedac@unal.edu.co

³Universidad Nacional de Colombia. E-mail: jmtejeiros@unal.edu.co

photon's trajectory from the black hole to observer. Since are millions of photons recieved by the observer, we need a computational tool to resolve this problem for generating the image of black hole. Thanks to the *YNOGK- GEOKERR* code, we can visualise the black holes characteristics and the solutions of the equations of motion using separability and interior point methods. With this article we want to study this type of space and also to show the results for black hole simulations with this routine.

Keywords: Ray tracing, Hamilton Jacobbi separability, Boyer-Linquist coordinates.

1 Introducción

En este artículo estudiamos la solución de las ecuaciones de campo de Einstein y la obtención de las ecuaciones de movimiento para un espacio axialmente simétrico (espacio de Kerr) de un agujero negro rotante. Su interés esta en hacer cambios de coordenadas para solucionar dichas ecuaciones. El objetivo principal de este trabajo es el uso de herramientas computaciones que permiten solucionar este tipo de problemas de manera más eficiente y haciendo uso de simulaciones que generan una perspectiva distinta sobre los distintos parámetros del problema.

A partir de la relatividad general, donde se deduce la ecuación de la geodésica, que describe la trayectoria del fotón sobre la variedad espacio temporal de Kerr, se emplea el uso de las tétradas, que es el sistema utilizado por Chandrasekhar (1998), para describir las ecuaciones de movimiento encontradas desde el tensor de Riemann y de Ricci. También es usado, el Gauge elegido por Chandrasekhar (1998), el cual aborda el problema relacionado con el horizonte de eventos del agujero negro. Un punto importante tiene que ver con la ecuación de Ernst debido a que desde allí se generan los factores de la métrica y puesto que las componentes del tensor de Ricci y de Riemann están dadas por una combinación lineal del tensor de Riemann, al anularse ésta, se obtienen las ecuaciones del espacio - tiempo axialmente simétrico. Las ecuaciones de movimiento para el fotón en inmediaciones del agujero negro se escriben usando las coordenadas de *Boyer-Lindquist* (B.L), Boyer & Lindquist (1967), que permiten un cambio coordenado, para abordar este problema de una manera más simple. Las coordenadas de B.L Boyer & Lindquist (1967), se usan particularmente porque minimizan el número de componentes fuera de la diagonal de la matriz y permiten establecer una diferencia entre el horizonte de eventos y la ergosfera. Además, se hace la separabilidad de Hamilton Jacobi para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema, Wiltshire et al. (2009). Para las soluciones de dichas ecuaciones de movimiento, todas las integrales cuárticas se han transformado a cúbicas a partir del método de Carlson, Dexter & Agol (2009). Se resuelven dichas integrales (elípticas) por los algoritmos del código implementado y siguiendo este proceso para cada coordenada, se encuentra la descripción del comportamiento de los fotones en una región conocida como “puntos de retorno” que es importante cuando se resuelve el problema del trazado de rayos. Hay algunas características sobre el trazado de rayos, el cual simula el camino que siguen los fotones. Estos pueden ir al infinito ó caer en el interior del agujero negro donde $R(r) = 0$, entonces no hay raíces reales, y sí el punto de retorno es menor o igual

al radio del horizonte de eventos, se considera como si tuviera dos puntos de retorno, el horizonte de eventos y el infinito (cuando el fotón cae en el interior del agujero). Finalmente, para la implementación del código para el trazado de rayos, se encuentra que cada rutina del código tiene una tarea específica en resolver las ecuaciones de movimiento en el sistema coordenado elegido por los métodos establecidos por *Carter*, además, expresa todas las coordenadas en función de un parámetro p que corresponde a la terminación de la geodésica cuando llega al observador y lo que sucede cuando hay una intersección de la geodésica con alguna superficie de la región. Así mismo, el estudio de las geodésicas con los ejemplos ilustrados en este trabajo y teniendo en cuenta un factor importante que es tomar como variable independiente r y μ . Se hace referencia también al cálculo de las trayectorias de los fotones que se propagan desde el plano ecuatorial en el infinito hasta el disco de acreción que un observador lejano podría obtener con un telescopio. El color y la intensidad se pueden relacionar con la energía recibida de los fotones, y de esta manera generar una imagen formada con cada píxel de las diferentes trayectorias, Boyer & Lindquist (1967). Las imágenes son también distorsionadas por el efecto Doppler debido a la rotación, corrimiento al rojo (redshift) gravitacional y doblamiento de la luz cerca al agujero negro, esto es una buena aproximación a lo que sucede en el espacio. También las orientaciones que toman los fotones en la parte lejana del disco causan una asimetría en el disco generando un efecto de doblamiento en el observador. Este trabajo puede expandir sus horizontes a otro tipo de métricas, y además se puede extender al problema de la transferencia radiativa.

1.1 La métrica de Kerr

La métrica de Kerr es una solución estacionaria y axialmente simétrica a las ecuaciones de campo de Einstein. Para los espacios axialmente simétricos se requiere que los coeficientes de la métrica sean independientes de $x^0 = t$ y x^1 además de las coordenadas de Boyer Lindquist, (t, r, θ, ϕ) . Una condición importante es que el espacio-tiempo (E-T) debe ser invariante bajo inversión simultánea de t y ϕ , debido a que la fuente de campo gravitacional tiene movimiento rotacional alrededor del eje de simetría. Esta inversión es el difeomorfismo que preserva las relaciones de simetría y el álgebra tensorial, con estas condiciones la métrica tiene la forma

$$ds^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - e^{2\Psi}(d\phi - \omega dt)^2 - e^{2\mu_2}(dx^2)^2 - e^{2\mu_3}(dx^3)^2, \quad (1)$$

se deben tener en cuenta ciertas definiciones importantes para los términos relacionados con la métrica, una de ellas es que la métrica es estacionaria y axialmente simétrica, en general para el E-T se tiene la ecuación del horizonte de eventos, la cual permite estudiar el problema en el plano ecuatorial

$$N(X^2, X^3) = 0, \quad (2)$$

y esta debe ser una superficie nula para que satisfaga las condiciones de este tipo de espacios. Usando el Gauge de libertad sugerido por Chandrasekhar (1998), se tiene

$$e^{2(\mu_3 - \mu_2)} = \Delta(r), \quad (3)$$

con esta generalización de la derivada covariante, teniendo en cuenta también que para una superficie nula $\Delta(r) = 0$ y junto con otras condiciones, se obtiene la solución para Δ

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (4)$$

La solución a la ecuación (4) es de gran importancia en este trabajo porque de allí surge el análisis para el movimiento del fotón y la descripción para las ecuaciones de movimiento.

1.2 Ecuación de Ernst y la métrica de Kerr

La ecuación de Ernst permite una solución de la forma

$$\tilde{E} = -p\eta - iq\mu, \quad (5)$$

que sirve para encontrar los coeficientes de la métrica

$$p^2 + q^2 = 1, \quad (6)$$

siendo p y q constantes, que serán representadas en este trabajo como a y M , luego se entrará en detalle para cada una de estas. después del cálculo algebraico, a partir de la solución a la ecuación de Ernst, se obtiene lo siguiente

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\delta, \quad (7)$$

$$e^{2\Psi} = \frac{\delta\Sigma^2}{\rho^2}, \quad (8)$$

$$\omega = \frac{2aMr}{\Sigma^2}, \quad (9)$$

$$e^{2\nu} = \frac{\rho^2\Delta}{\Sigma^2}. \quad (10)$$

Las componentes del tensor de Ricci y de Einstein, se encuentran dadas por una combinación lineal de las componentes del tensor de Riemann, que al anularse, se obtiene la ecuación para el espacio tiempo axialmente simétrico y estacionario. De este cálculo matemático se obtiene

$$e^{\mu_3 + \mu_2} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\Delta}}, \quad (11)$$

donde el gauge elegido fue usado por Chandrasekhar (1998), el cual viene dado como $e^{\mu_3 - \mu_2} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\Delta}}$. Al generar las soluciones para μ_3 y μ_2 se tiene

$$e^{2\mu_2} = \frac{\rho^2}{\Delta}, e^{2\mu_3} = \rho^2, \quad (12)$$

con esto se completa la solución para los coeficientes de la métrica, que al sustituir en la métrica, esta se reescribe como

$$ds^2 = \rho^2 \frac{\Delta}{\Sigma^2} (dt^2) - \frac{\Sigma^2}{\rho^2} (d\varphi - \frac{2aMr}{\Sigma^2} dt)^2 \sin^2\theta - \frac{\rho^2}{\Delta} (dr)^2 - \rho^2 (d\theta)^2. \quad (13)$$

1.3 Las ecuaciones de movimiento del fotón

A partir de la ecuación (1) y reemplazando las condiciones dadas por el Gauge de libertad Chandrasekhar (1998), la métrica queda finalmente expresada de la siguiente forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \left(\frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt d\varphi + \left(\frac{\Sigma}{\Delta}\right) dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(\frac{r^2 + a^2 + 2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (14)$$

siendo M la masa del agujero negro, a el parámetro de rotación relacionado con el momentum angular ($0 \leq a \leq M$), que diferencia la métrica de Kerr con la de Schwarzschild y debido a las siguientes condiciones que son de gran importancia para los coeficientes de la métrica,

$$\Sigma = \rho^2, \quad (15)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (16)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (17)$$

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad (18)$$

$$\mu^2 = \cos^2 \theta, \quad (19)$$

$$\mu^2 = 1 - \sin^2 \theta, \quad (20)$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \mu^2, \quad (21)$$

$$\sin^2 \theta = \delta, \quad (22)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \mu^2. \quad (23)$$

Que son las expresiones útiles para encontrar las ecuaciones de movimiento del fotón, donde σ es el tiempo propio de la partícula, μ representa las distintas órbitas de los fotones, a el parámetro de rotación r, θ las coordenadas espaciales y ρ el parámetro de ajuste. La representación de la métrica (ver ecuación (14)) en términos del horizonte de eventos que matemáticamente está localizado por fuera de la raíz en la ecuación (4) para $\Delta = 0$

$$r = r_+ \equiv M \pm \sqrt{(M^2 - a^2)}, \quad (24)$$

al usar la condición expresada en la ecuación (16) y el signo \pm determina la región a estudiar, se obtiene

$$0 = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (25)$$

Debido a que ($0 \leq a \leq M$), r solo puede tomar los valores que surgen a partir de la ecuación (25) y que en $a = 0$ representa solución de *Schwarzschild*

$$\begin{cases} \text{si, } a = 0 & r = 2M \\ \text{si, } a = M & r = M, \end{cases}$$

el límite estático que se encuentra fuera de la frontera del agujero negro en la ergosfera, se determina por la raíz de $\Sigma - 2Mr = 0$, y se obtiene a partir de las condiciones establecidas en las ecuaciones (16) y (18). Como $\Delta = 0$, entonces al tomar la ecuación (25) completar el cuadrado e igualar con (16) y (17) se tiene

$$\Sigma - 2Mr = 0 \quad (26)$$

el cálculo de Σ es importante porque es un parámetro que aparece en la métrica. Desde la ecuación (24) se obtiene el horizonte de la ergosfera. Para un observador que sigue la línea como de tiempo, debe ser arrastrado en la dirección positiva de Φ . Si esta en el interior del límite estático (ergosfera), estos observadores tienen acceso a una energía de trayectoria negativa la cual en principio, extrae energía del agujero negro, Bardeen et al. (1972), Yang & Wang (2013).

1.4 Separabilidad de Hamilton Jacobi

La separabilidad de Hamilton Jacobi se aplica para tener las ecuaciones de movimiento del fotón y con la ecuación de las geodésicas

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0, \quad (27)$$

donde σ representa el tiempo propio de la partícula y el parámetro afín para los fotones, ver Dexter & Agol (2009), u^ν es la quadri-velocidad y $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ son los coeficientes de conexión que toman la forma de la ecuación de la geodésica para aplicarle la separabilidad

$$2 \frac{dS}{d\sigma} = g^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j}, \quad (28)$$

con S como la acción clásica que después de algunos cálculos matemáticos, se obtienen un par de ecuaciones que se expresan en términos de R y Θ , se reconocen como los parámetros, en los cuales se desea hacer la separación y Q que representa la constante de separación de Carter. De esta forma, se encuentra la solución para la acción

$$\int^r \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}. \quad (29)$$

De la ecuación (31) depende el planteamiento de las ecuaciones de movimiento para el fotón y del método de Carter que es donde se empiezan a implementar los métodos numéricos para resolver estas ecuaciones, Dexter & Agol (2009).

1.5 Cuadri-momento del fotón

Las órbitas de movimiento son descritas por las constantes de movimiento de Carter

$$Q = k - (L_z - aE)^2, \quad (30)$$

en la cual Q es la constante de Carter L_z el momento angular sobre el eje de rotación y E la energía. De la ecuación (30) se obtiene el cuadri-momento del fotón

$$\begin{aligned}
\Sigma \frac{dr}{d\sigma} &= \pm \sqrt{R}, \\
\Sigma \frac{d\theta}{d\sigma} &= \pm \sqrt{\Theta}, \\
\Sigma \frac{d\varphi}{d\sigma} &= - \left(a - \frac{\lambda}{\sin^2 \theta} \right) + a \frac{T}{\Delta}, \\
\Sigma \frac{dt}{d\sigma} &= -a(a \sin^2 \theta - \lambda) + (r^2 + a^2) \frac{T}{\Delta},
\end{aligned} \tag{31}$$

que es el conjunto de ecuaciones que describe la trayectoria del fotón en términos de cada coordenada y que en otras palabras se pueden reconocer como el resultado de la separación. Estas ecuaciones son solucionadas en la siguiente sección y para ello se necesita ejecutar el programa, Yang & Wang (2013).

1.6 Solución a las ecuaciones de Movimiento

Ahora se expresan las coordenadas de B.L en términos de una transformación p . Las funciones R y Θ no deben ser negativas y los puntos de frontera de esta región serán puntos de retorno además las coordenadas para un fotón emitido son r_{ini} y θ_{ini} . El movimiento está confinado entre dos puntos de retorno r_{tp1} y r_{tp2} , siendo una coordenada radial. En el caso θ_{tp1} y θ_{tp2} se representa por una coordenada poloidal. El movimiento de un fotón puede no necesariamente estar determinado por una frontera, esto significa que este puede ir al infinito ó caer al interior del agujero negro, el último caso, particularmente hace referencia a $R(r) = 0$, donde no hay raíces reales. En un movimiento poloidal, es importante tener en cuenta que $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Por ejemplo, un fotón con $\lambda = 0$ se dirige por el eje de espín debido al momentum angular nulo, y los cambios de signo en la velocidad angular $d\theta/d\sigma$. La coordenada azimutal varía de φ a $\varphi \pm \pi$, lo que implica que el eje de espín no es un punto de retorno ya que no son raíces reales de las ecuaciones $\Theta = 0$, Yang & Wang (2013); Dexter & Agol (2009). Por último, usando las Integrales elípticas Weierstrass-Jacobi, que solucionan numéricamente las ecuaciones de movimiento en el problema de la trayectoria de los fotones sobre la geodésica, debido a que surgen polinomios de grado superior. Para más información sobre las integrales elípticas ver Byrd & Friedman (1971).

1.7 El método de Carlson

Este método es usado para escribir las coordenadas en términos de una nueva función p , tal como se enunció en la sección anterior, esta nueva coordenada implica resolver cada coordenada para las ecuaciones de movimiento. Principalmente es una representación de para la solución de integrales elípticas ver Dexter & Agol (2009),

$$p = \pm \int^r \frac{dr}{\sqrt{R}} = \pm \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}, \tag{32}$$

donde p , es el parámetro que describe el movimiento del fotón a lo largo de la geodésica para cada coordenada. Gracias al parámetro p se obtienen ecuaciones re-

ducidas a polinomios cúbicos y son las que resuelven el programa a partir de las integrales elípticas. Yang & Wang (2013)

Esto se debe, a que se quiere hallar la posición original de donde se emitió el fotón ó los caminos que tomo este, por lo tanto se hace el trazado desde el observador al emisor, a lo largo de geodésicas y con al método de Newton Raphson se traza cada coordenada que depende de la cantidad y tipo de raíz que tenga al solucionar las ecuaciones de movimiento.

- *Coordenada μ .*
- *Coordenada r .*
- *Coordenada t , Φ y parámetro afín σ*

Las anteriores son las coordenadas de movimiento que se simulan con el código.

2 El Código

El código *YNOGK-GEOKERR* está escrito en *Fortran95* y fue desarrollado por Dexter & Agol (2009), posteriormente modificado por Yang & Wang (2013). El código resuelve las ecuaciones de movimiento para las geodésicas nulas en un espacio axialmente simétrico y en base a estos resultados simula un trazado de rayos con diferentes condiciones, computando las trayectorías que sigue el fotón sobre la variedad espacio temporal.

Los métodos usados en el código son los empleados por Carter para resolver ecuaciones elípticas de primer y segundo tipo. Los datos obtenidos en este código se reproducen en una grilla con un parámetro de impacto determinado por el programa y que el usuario puede ajustar, así mismo, las otras componentes del código se usan para estudiar el comportamiento de las geodésicas y resolver ecuaciones cuárticas con parámetro p . También, las integrales elípticas se transforman a cúbicas. De esta manera las cuatro coordenadas y el parámetro afín se expresan en función de p . El interés de realizar esto, es determinar la posición original donde el fotón fue emitido o el camino seguido por este. Para que el cálculo sea más preciso los fotones se trazarán hacia atras, desde el observador al emisor siguiendo geodésicas. Pero no todos los fotones que empiezan desde un observador dado van a la región de emisión, puede que algunos se pierdan en el camino, cuando los fotones alcanzan el infinito o caen en el horizonte de eventos.

Además el código usa la rutina de transferencia radiativa de *Monte-Carlo*, que requiere hacer unas transformaciones entre los marcos de referencia del emisor y el sistema de B.L donde se puede observar que la emisión en el marco de referencia del emisor es isotrópica, como se observa en la figura 1, pero desde el sistema B-L es anisotrópico, debido al efecto de apantallamiento Doppler. Este código Yang & Wang (2013), es una modificación de Dexter & Agol (2009), pero logra una velocidad de procesamiento de los datos mayor, además se incluyen unas rutinas nuevas para la transferencia radiativa.

3 Resultados

3.1 Rayos

En la figura 1 se muestra los rayos de un grupo de geodésicas nulas emitidas isotrópicamente por una partícula moviéndose alrededor del agujero negro en una órbita circular estable r_{ms} .

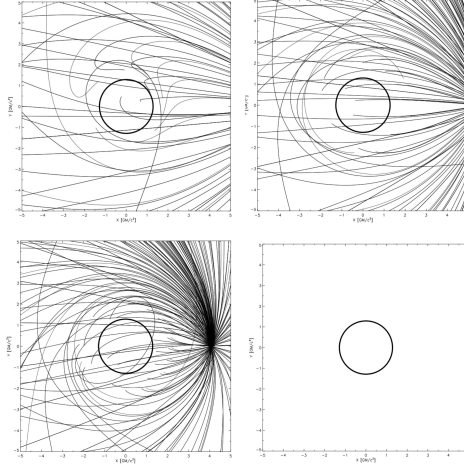


Figura 1: En esta simulación se tomaron diferentes valores para a (momentum angular de espín) $a = -0.9375, 0.5, 0$ y 1 respectivamente. La escala de grises representa el parámetro afín

En la figura 1, el agujero negro esta situado en origen coordinado y alrededor se observan las diferentes trayectorias que siguen los fotones, con distintos valores para el momento angular. y los x e y son una especie de coordenadas cartesianas en el plano ecuatorial del agujero negro, esta figura es muy importante porque se puede apreciar el efecto de lente gravitacional, Castañeda (2014).

3.2 Sombra del agujero (Shadow)

La figura 2, muestra la imagen de la sombra del agujero negro, en el cual la intensidad de grises es representada por el valor del parámetro afín σ que mide el observador en la posición final, y en función de $\sigma(p)$ el momento angular del agujero, en este caso es de $a = 0.998$ y la escala de grises representa el valor de σ evaluado para un observador en una posición final cualquiera con respecto al agujero negro, o apareciendo en el radio inicial. Los ejes α y β son los parámetros de impacto que describen el tamaño y la posición de la imagen.

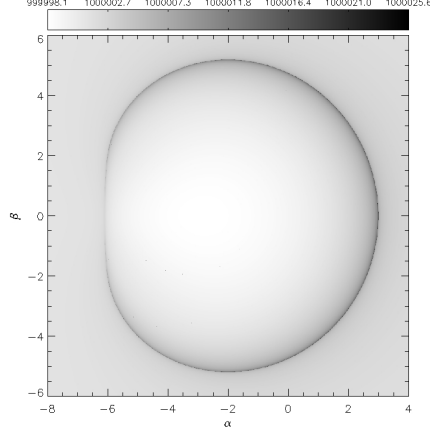


Figura 2: La intensidad del color representa el parámetro afín, con momentum angular de espín $a = 0.998$ y α , β representan el parámetro de impacto.

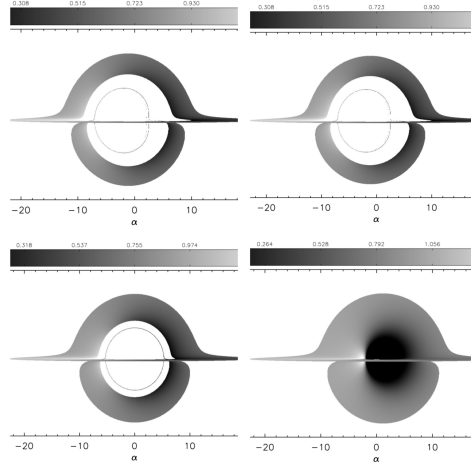


Figura 3: En esta simulación se tomaron distintos valores para $a = -1, -0.998, 0$ y 1 donde se ve lo único que cambia es r . La escala de grises representa el redshift gravitacional al igual que el ejemplo anterior los ejes α y β son los parámetros de impacto que describen el tamaño y la posición de la imagen.

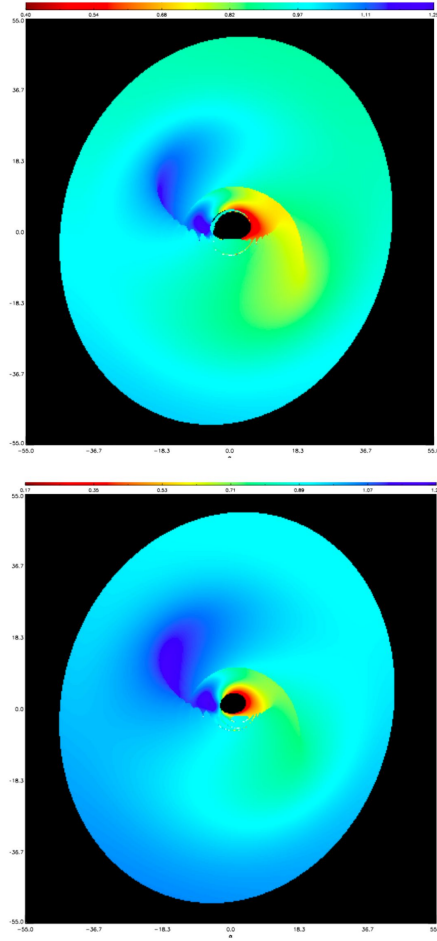


Figura 4: La intensidad de color se torna mas intensa debido al efecto Doppler gravitacional, si se modifica el ángulo desde el observador el disco se deforma. Los ejes representan el párametro de impacto sobre la grilla.

3.3 Discos de acreción y discos deformados (Warp)

En la figura 3 se muestra los discos de acreción. Se calcula los perfiles de emisión para FeK_{α} , Dexter & Agol (2009) y su espectro, C. Fanton & Cadez (1997). Usualmente los colores de la imagen representan el redshift o el flujo de intensidad para el observador, de la emisión proveniente del disco. La inclinación del disco es $\theta_{obs} = 85^{\circ}$ y la distancia del observador es $40r_g$. Se puede ver la parte interior del agujero negro y la parte inferior del disco.

La acreción en los agujeros negros, ver figura 4, es importante porque se puede

considerar como una forma de transformar energía gravitacional en radiación y que generalmente ocurre en un disco, su forma cambia dependiendo de diferentes cantidades, por ejemplo el ángulo en el cual se encuentra el observador, que se relaciona con el transporte de momentum angular de las regiones interiores a las regiones exteriores del sistema, eso define de forma general su morfología.

4 Conclusiones

La importancia en el desarrollo de herramientas computacionales ha permitido resolver y simular, diversas situaciones además de abordar distintos problemas que con ayuda del cálculo numérico, que permiten un trabajo más efectivo y que lleva los problemas a un punto donde se puede aproximar en gran instancia a la realidad. Este trabajo se basa principalmente en dos códigos que describen los espacios axialmente simétricos YNOGK, Yang & Wang (2013) y GEOKERR, Dexter & Agol (2009). El segundo de gran importancia porque es donde surge esta laboriosa tarea a partir de la métrica establecida por Kerr en 1960 y que por mas de 50 años astrofísicos han estudiado. La separación de Hamilton-Jacobi usa las cuatro coordenadas y el parámetro afín, para atacar el problema del trazado de rayos. Gracias a esto se logra determinar las orbitas de los fotones alrededor del agujero negro y la trayectoria medida desde el observador. Encontrando las soluciones a las ecuaciones de movimiento cuyas raíces especifican el comportamiento de los fotones. Cada rutina se encarga de resolver numéricamente sus respectivas coordenadas, una tarea compleja de realizar manualmente debido a que surgen ecuaciones no lineales y en su mayoría se resuelven usando el método de Newton-Raphson.

Finalmente con este trabajo, se pretende llevar a otro tipo de métricas y estudiar diferentes problemas relacionados con los agujeros negros, además de estudiar problemas como lensing gravitacional y transferencia radiativa, entre otros.

Bibliografía

- J. M. Bardeen, et al. (1972). ‘Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation’. *ApJ* **178**:347–370.
- R. Boyer & R. W. Lindquist (1967). ‘Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric’. *Public Journal of mathematical physics* **8**(2):265–283.
- P. Byrd & M. Friedman (1971). *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag.
- F. F. C. Fanton, M. Calvani & A. Cadez (1997). ‘Detecting Accretion Disk in Active Galactic Nuclei’. *Public Astronomy Society Japan* **11**(49):159–169.
- L. Castañeda (2014). *Notas de Clase Lentes Gravitacionales (en proceso)*.
- S. Chandrasekhar (1998). *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford classic texts in the physical sciences. Clarendon Press.

- J. Dexter & E. Agol (2009). ‘A Fast New Public Code for Computing Photon Orbits in a Kerr Spacetime’. *ApJ* **696**:1616–1629.
- D. Wiltshire, et al. (2009). *The Kerr Spacetime: Rotating Black Holes in General Relativity*. Cambridge University Press.
- X. Yang & J. Wang (2013). ‘YNOGK: A New Public Code for Calculating Null Geodesics in the Kerr Spacetime’. *ApJs* **207**:6.